Die Laurent-Trennung (Zusammenfassung)

Tietz, Horst

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1988 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.80

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

14.10.1988 in Braunschweig

Die Laurent-Trennung

(Zusammenfassung)

Von **Horst Tietz**

In der komplexen Funktionentheorie hat die *Differenzierbarkeit in Gebieten* bekanntlich schärfste Konsequenzen: Eine solche Funktion f ist bereits im Großen festgelegt, wenn sie nur im Kleinen definiert ist; das wiederrum hat zur Folge, daß ihr Verhalten in der Nähe von Randpunkten des Differenzierbarkeitsgebietes ein starker Indikator für ihre globalen Eigenschaften ist. Solche Randpunkte heißen Singularitäten der Funktion; die isolierten sind die einfachsten, und unter diesen wiederum die sogenannten *Pole*, in denen zwar nicht f, wohl aber $\frac{1}{f}$ differenzierbar ist. Ist a ein Pol von f, so gibt es ein Polynom in $\frac{1}{z-a}$ – den *Hauptteil* H (f; a) von f bei a –, der bei a dasselbe singuläre Verhalten hat wie f: H (f; a) kann charakterisiert werden als die einfachste Funktion, die den Pol von f kompensiert.

Hat f unendlich viele Pole a_n ($n \in \mathbb{N}$), so tritt ein *Konvergenzproblem* auf:

Läßt sich f *durch* $\sum_{n=1}^{\infty} H(f, a_n)$ *darstellen?*

Der Vortrag stellt eine Lösung des Problems vor.

Für den einfachsten Fall, daß f in der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ bis auf Pole differenzierbar ist, läßt sie sich wie folgt formulieren: T, die Menge der *Testfunktionen*, bestehe aus allen Funktionen τ, die im Punkt ∞ eine konvergente Potenzreihendarstellung

$$\tau(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k z^{-k}$$

besitzen; ferner durchlaufe $\mathcal{C}_\ell$ eine Folge konzentrischer Kreise, auf denen kein Pol von f liegt, und deren Radien unbeschränkt wachsen; *dann gilt*

$f = \sum_{n=1}^{\infty} H(f, a_n)$ *dann und nur dann, wenn für jedes* $\tau \in T$ *die Zahlenfolge* $\int_{\mathcal{C}_\ell} f \cdot \tau \, dz$ *gegen* 0 *konvergiert.*

Die Methode, die u.a. dieses Resultat liefert, nenne ich Laurent –Trennung, weil sie eine verallgemeinernde Systematisierung der Methode darstellt, mit der 1843 Laurent die Entwicklung einer in einem Kreisring differenzierbaren Funktion in eine verallgemeinerte Potenzreihe hergeleitet hat.